

DOI: [10.32702/2307-2105-2019.3.32](https://doi.org/10.32702/2307-2105-2019.3.32)

УДК 369.04:519.863

*М. Є. Юрченко,  
к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри інформаційних систем в економіці,  
Чернігівський національний технологічний університет*

## **ДИСКРЕТНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ ПІДПРИЄМСТВА**

*Maryna Iurchenko  
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Chernihiv National University of Technology*

### **DISCRETE MODEL OF OPTIMAL INVENTORY MANAGEMENT OF ENTERPRISE**

*Система управління запасами являє собою оптимізацію операцій, безпосередньо пов'язаних із переробкою та оформленням вантажів, координацію зі службами закупівель і продажів, розрахунок оптимальної кількості складів і місця їх розташування. Ефективне управління запасами дозволяє організації задовольняти або перевищувати очікування споживачів, створюючи такі запаси кожного товару, які максимізують чистий прибуток. Управління запасами в загальному випадку полягає у дії на співвідношення між двома основними факторами - поповненням і витратою запасів. Ясно, що надмірно великий запас призводить до надлишку матеріальних цінностей і вимагає великих витрат на зберігання, недостатній запас може призвести до перебоїв у роботі. Мета управління - оптимізація деякого критерію, що залежить від витрат на зберігання запасів, вартості поставок, витрат, пов'язаних з поповненням, штрафів і т. д. У роботі розглянуто дискретну модель управління запасами, за умови контролю за станом запасів в певні проміжки часу. Побудовано математичну модель розв'язання задачі за заданими початковими умовами.*

*The inventory management system is the optimization of operations directly related to the processing and clearance of goods, coordination with the procurement and sales services, the calculation of the optimal number of warehouses and their location. Effective inventory management allows an organization to meet or exceed customer expectations by creating stocks of each product that maximize net income. Inventory management in the general case lies in influencing the ratio between the two main factors - replenishment and consumption of stocks. It is clear that an excessively large supply leads to an excess of material values and requires large storage costs; an insufficient supply can lead to interruptions in work. The purpose of management is to optimize some criterion depending on the costs of storing stocks, the cost of supplies, costs associated with replenishment, fines, etc.*

*At present, a number of works are devoted to the question of the correct formulation and solution of the inventory management problems, among which special attention should be paid to the texts of G. L. Prosvetov, D. Streibfereer, V. Burmistrov and others. According to them, when solving such problems, analytical methods and methods of simulation modeling are used, while the accuracy and completeness of the decision depends on the initial conditions of the original problem and on the*

*correctness of its formulation. It should be noted that along with stochastic processes with continuous time, the discrete processes of inventory management play an important role. This is due to the fact that there is a very large class of problems that are described by the equations with the discrete time.*

*The paper considers a discrete model of inventory management, subject to monitoring the status of stocks at certain time intervals. It presents a multilevel inventory management model that reduces to the problem of controlling a linear discrete system under given initial conditions. When constructing a model, it is assumed that a periodic control over the state of stocks, which occurs at fixed intervals of time, is carried out. A method for solving the abovementioned problem under given initial conditions is constructed and illustrated with particular example.*

**Ключові слова:** керування запасами; дискретна модель; оптимальне управління; математична модель.

**Keywords:** inventory management; discrete model; optimal control; mathematical model.

**Постановка проблеми.** Необхідною умовою забезпечення організаційно-економічної стійкості промислових підприємств є оптимальне управління матеріальними запасами. На сьогодні, все більше підприємств функціонує в умовах нестационарності, коли велика кількість факторів, що впливають на величину запасів та формування витрат на їх створення, можуть значно змінюватися протягом обмеженого періоду часу. Оптимізація управління матеріальними запасами на основі логістико-орієнтованого підходу дозволяє значно підвищити ефективність функціонування і забезпечує досягнення стратегічних цілей підприємств, що функціонують у нестационарних детермінованих умовах.

Управління запасами являє собою проблему, спільну для підприємств будь-якого типу. Запаси необхідно створювати у сільському господарстві, промисловості, роздрібній торгівлі, для потреб оборони тощо. Основною причиною створення запасів є те, що надходження товарів саме у момент виникнення попиту є або фізично неможливим, або економічно неефективним. У той же час, створення і підтримання запасів потребує значних витрат і капіталовкладень, тому для кожного підприємства існує проблема вибору оптимальної стратегії управління запасами, що дозволяє мінімізувати вказані втрати.

При виборі стратегії управління запасами необхідно визначити:

- коли поповнювати запас;
- яким повинне бути замовлення на поповнення.

Формування необхідної кількості товарних запасів дозволяє підприємству забезпечити як стійкий асортимент товарів, так і стабільний їх продаж у поточний період, тому для підтримки товарних запасів на оптимальному рівні потрібна чітка система управління ними. Важливість даного класу задач призвела до вдосконалення математичних методів, до яких відносяться задачі оптимального управління.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В умовах загострення конкуренції на споживчих ринках стійкість підприємства забезпечується шляхом реалізації оптимальних стратегій, які направлені, з одного боку, на максимальне задоволення споживчого попиту, а з іншого - на зменшення торгівельних витрат.

Проблемам моделювання процесів управління запасами присвячені роботи Г.Л. Просветова та Д. Штрайбфедера [1, 2], деякі маркетингові аспекти управління товарними запасами відображені в роботі В. Бурмістрова [3], логістичні схеми у роботах Н. Бланка [4], В. Волгіна та інш. Особливостям використання математичного апарату присвячена робота [5], в якій розглянута стохастична модель з невизначеністю по часу виконання замовлення. Однак слід відзначити, що поряд зі стохастичними процесами із неперервним часом, важливе місце посідають і дискретні процеси управління запасами. Це обумовлено тим фактом, що існує дуже великий клас задач, які описуються рівняннями саме із дискретним часом. У розглянутих моделях інформація про стан процесу поступає саме в фіксовані моменти часу.

**Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми.** Завдяки активізації ряду факторів, у тому числі і впровадженню логістики, багато підприємств послідовно пов'язані між собою, тобто виробництво і система запасів набувають взаємозалежний характер. У такій ситуації, аналізуючи систему управління матеріальними запасами, необхідно виходити з принципу комплексного регулювання, що дозволяє гармонійно поєднати всі ланки виробничо-збутового ланцюга і домогтися максимального ефекту від оптимізації матеріальних запасів.

На сьогодні розроблено велику кількість систем управління матеріальними запасами, що дозволяють скоротити витрати на створення і підтримку запасів, однак всі ці системи однорівневі, часто представлені в загальному вигляді і не завжди відповідають специфічним умовам функціонування конкретного підприємства.

На поточний момент детально описано та розроблено методи визначення значень параметрів лише таких систем, що є найпростішими чи зводяться до найпростіших. Для більш складних ситуацій відомі лише

поодинокі результати про структуру систем управління запасами, а алгоритми розрахунку параметрів таких систем, як правило, відсутні.

**Постановка завдання.** Представлена багаторівнева модель управління запасами, яка зводиться до задачі управління лінійною дискретною системою при заданих початкових умовах. При побудові моделі вважається, що здійснюється періодичний контроль за станом запасів, який відбувається через фіксовані проміжки часу.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Оскільки кожна з найпростіших систем має свої недоліки, навіть при правильному виборі базової системи управління запасами та визначенні її параметрів не можна з упевненістю стверджувати, що отримана на її основі стратегія буде оптимальною і дасть мінімум витрат, пов'язаних зі створенням і підтримкою необхідного запасу. Особливо це стосується значної частини підприємств, що функціонують в нестационарних умовах, коли багато параметрів (в першу чергу, динаміка зміни попиту), що визначають вибір системи управління запасами і значень її характеристик, змінюються протягом короткого періоду часу. У даних умовах у різні інтервали часу для підприємства можуть відрізнятися оптимальні системи управління запасами, а також можуть змінюватися оптимальні значення параметрів цих систем. Таким чином, в нестационарних умовах, використання деякої однієї з найпростіших систем протягом усього періоду планування не забезпечує мінімізацію витрат на утримання і поповнення запасу. При періодичному перегляді застосовуваної системи управління запасами та перерахунку її параметрів також не можна з упевненістю стверджувати, що ці витрати будуть мінімальні.

З іншого боку, у разі, коли фактори (як стаціонарні, так і нестационарні), що визначають вибір стратегії управління запасами, визначені (детерміновані) з достатнім ступенем точності протягом аналізованого періоду часу, існує можливість визначити оптимальну стратегію, що дозволяє мінімізувати витрати на створення і підтримання запасів. При цьому, чим більш вираженою є нестационарність зазначених факторів, тим більшого ефекту можна досягти за допомогою оптимізації матеріальних запасів на підприємстві. Слід зазначити, що дискретні керовані процеси займають важливе місце в практиці оптимального управління. Це обумовлено тим, що багато завдань описуються різницевиими рівняннями з дискретним часом і управління так само здійснюється дискретно.

Розглянемо модель задачі у дискретній постановці. Нехай на складі деякої фірми наприкінці  $k$  – го періоду є деяка кількість товарів

$$y(m) = \{y_1(m), y_2(m), \dots, y_n(m)\},$$

Введемо наступні позначення:

-  $v(m) = \{v_1(m), v_2(m), \dots, v_z(m)\}$  – вектор ресурсів,

-  $p(m) = \{p_1(m), p_2(m), \dots, p_n(m)\}$  – вектор кількості товарів, які поставляються зі

складу в  $m$  період,

-  $V_{n \times z}$  – технологічна матриця.

Матричне рівняння, яке описує процес, має вигляд

$$y(m+1) = y(m) + Vv(m) - p(m) \quad (1)$$

Вважаємо, що існує наступна залежність кількості товарів, що поставляються зі складу, від кількості товарів, що вже є на складі:

$$p_i(m) = b_i(m)y_i(m), \quad 0 \leq b_i(m) \leq 1 \quad (2)$$

У виразі (2) коефіцієнт  $b_i(m)$  показує, яка саме частина запасу  $i$  – го товару може бути реалізована в наступний період.

Система (1) в матричній формі може бути представлена в наступному вигляді

$$y(m+1) = A(m)y(m) + Vv(m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

де

$$A_{n \times n} = [1 - a_1(m) \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1 - a_2(m) \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 - a_n(m)],$$

а вектор ресурсів  $v(m)$  є набором керуючих впливів. Нехай якість роботи системи оцінюється величиною

$$T(v) = \sum_{m=0}^N v^2(m). \quad (4)$$

Слід зазначити, що величина  $T(v)$  виражає сумарні витрати за весь плановий період часу, якщо вважати, що система (3) є керованою на відріжку. Треба обрати управління  $v(m)$  таким чином, щоб величина показника (4) набувала найменшого значення. При цьому потрібно, щоб при відомому початковому запасі  $y(0)$  при  $m = 0$  в момент  $m = N$  кількість товарів дорівнювала б бажаній кількості  $y(N) = y_1$ .

Як відомо [5], оптимальне програмне управління системи (3) за умови (4) визначається з наступного співвідношення:

$$v^*(m) = M^z(m)H^{-1}\gamma, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5)$$

де

$$M^z(m) = \prod_{n=0}^{N-1} A_{n \times n}(N-m-1)W, \quad (6)$$

$$H = \sum_{m=0}^{N-1} M(m)M^z(m),$$

$$\gamma = y(N) - \prod_{m=0}^{N-1} A_{n \times n}(N-m-1)y(0)$$

Слід відзначити, що задачі керування запасами є одними з найскладніших в математичному сенсі. За великої кількості періодів часу, замість програмного управління доцільно використовувати управління за принципом оберненого зв'язку. У цьому випадку, розв'язуючи відповідну задачу синтезу оптимального

управління  $v(m, y(m))$ , можливо коригувати план на кожному попередньому кроці, за умови, що вектор  $y(m)$  буде істотно відхилятися від оптимального розрахованого значення. Дане твердження стосується випадків, коли в каналах оберненого зв'язку існує затримка.

У якості практичного застосування наведеного методу розглянемо розв'язання задачі на конкретному прикладі. Вважаємо, що кількість видів продукції  $n = 3$ , кількість ресурсів, що використовуються,  $m = 2$ , період часу  $N=5$  місяців. При отриманні розв'язків вважаємо, що початковий запас товарів на складі наступний:

$$y(0) = (150, 100, 200)$$

Коефіцієнти  $a_i(m)$  змінюються в часі та надані в таблиці 1.

Таблиця 1. Коефіцієнт реалізації у відповідні періоди

$a_i(m)$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$a_1(m)$	0,6	0,75	0,9	0,95	1
$a_2(m)$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$a_3(m)$	0,7	0,8	0,9	1	1,05

Матриця  $A(0)$  в цьому випадку має наступний вигляд:

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Нехай задана матриця витрачених ресурсів

$$V = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,06 \\ 0,05 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Знаходимо величину ресурсів, які задовольняють критерій (4) та необхідні для того, щоб наприкінці п'ятого періоду часу на складі було б  $y(5) = [1100, 1900, 2100]$  одиниць продукції кожного виду відповідно.

Використовуючи процедуру (5), отримуємо керуючий вплив за весь період часу. Підставляючи управління у систему (3), з урахуванням відомого початкового стану системи  $y(0)$ , можливо знайти всі наступні стани. В таблиці 2 надано вектори управління, та відповідні стани складських запасів.

Таблиця 2. Вектори оптимальних управлінь та станів системи

Період часу	Вектор ресурсів $v(m)$	Вектор стану системи $y(m)$
0	<b>[114, 21]</b>	<b>[1100, 1900, 2100]</b>
1	<b>[307, 74]</b>	<b>[63, 33, 97]</b>
2	<b>[1618, 593]</b>	<b>[57, 33, 129]</b>
3	<b>[8252, 3740]</b>	<b>[204, 135, 571]</b>

4	<b>[633,16651]</b>	<b>[1044,733,2900]</b>
5		[1100,1900,2100]

**Висновки.** На теперішній час детально вивчені численні моделі систем управління запасами, що описують різноманітні реальні об'єкти відповідного типу. У всіх них, однак, передбачається або відсутність залежності між рівнем запасу і правилом виконання заявок на поповнення запасу, а також між рівнем запасу і попитом, або розглядаються найпростіші лінійні зв'язки. У представленому дослідженні задача подана у вигляді задачі управління лінійною дискретною системою. Наведено обґрунтування побудови оптимального керуючого впливу, яке приводить систему до бажаного кінцевого стану за наявності заданих початкових умов.

Розроблено метод розв'язання задачі визначення оптимальної стратегії управління запасами, що дозволило описати алгоритм, який забезпечує знаходження оптимальної стратегії управління запасами, що мінімізує витрати на створення і підтримку запасів за умови задоволення заданим обмеженням системи. Наведено приклад практичного використання моделі.

#### **Список літератури.**

1. Беляев Ю.А. Дефицит, рынок и управление запасами. М.: Ун-т дружбынародов, 1991. - 228 с.
2. Зермати П. Практика управления товарными запасами / Пер. с фр. -М.: Экономика, 1982.- 112 с.
3. Christopher M. Logistics and Supply Chain Management: Strategies for Reducing Costs and Improving Services. UK: Pitman Publishing, 1992. -273 p.
4. Gunter H.-O., Tempelmeier H. Produktion und Logistik. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest; Springer, 1994. - 302 p.
5. Iurchenko M., Marchenko N. Model of determining the optimal supply time of Products/Iurchenko M.//Scientific bulletin of Polissia.-2018.-Vol. 13.-№1.-P.60-63

#### **References.**

1. Belyaev, Yu.A. (1991), *Defitsyt, rynek i upravlenie zapasami* [Deficit, market and inventory management], Universitet Druzhby narodov, Moscow, Russia.
2. Zermatie, P. (1982), *Praktyka upravleniya tovarnymi zapasami* [Practice of inventory management], Ekonomika, Moscow, Russia.
3. Christopher, M. (1992), *Logistics and Supply Chain Management: Strategies for Reducing Costs and Improving Services*, Pitman Publishing, UK.
4. Gunter, H.-O. and Tempelmeier, H. (1994), *Produktion und Logistik*, Springer, Berlin, FRG.
5. Iurchenko, M. and Marchenko, N. (2018), "Model of determining the optimal supply time of Products", *Scientific bulletin of Polissia*, Vol. 13, no.1, pp.60-63

*Стаття надійшла до редакції 28.02.2019 р.*