Електронне наукове фахове видання **"Ефективна економіка"** включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки
(Наказ Міністерства освіти і науки України від 29.12.2014 № 1528)
www. economy.nayka.com. ua | № 4, 2018

УДК 519.865:330.567.6

Г. В. Акулова,
ст. викладач кафедри економічної кібернетики та прикладної економіки,
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ НАКОПИЧЕННЯ ЕКОНОМІЧНОГО АГЕНТУ-ВЛАСНИКА КАПІТАЛУ

Ganna Akulova,
senior lecture of Department of Economic Cybernetics and Applied Economics,
V. N. Karazin Kharkiv National University

MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF ACCUMULATION OF ECONOMIC AGENT-OWNER OF CAPITAL FACTOR

Стаття присвячена дослідженню динаміки накопичень економічного агенту, який володіє фактором капіталу. Для цього використовується математична модель геометричного випадкового блукання з урахуванням таких параметрів як розмір споживання агенту, його схильність робити більш або менш ризикові інвестиції. За допомогою моделі виводиться закон розподілу величини накопичень та оцінюються його параметри. З побудованою математичною моделлю проводиться серія експериментів для дослідження динаміки накопичень в різних середовищах. Розглянуто сценарій, параметризований на основі реальних даних, з відносно високою ймовірністю позитивного економічного результату від інвестицій в ризикові активи, розглянуто сценарій з рівноймовірними позитивним та негативним економічним результатом, а також проведено експерименти, що симулюють несприятливе середовище, з відносно низькою ймовірністю позитивного результату.

The paper is dedicated to the study of the dynamics of accumulation of an economic agent who owns a capital factor. To do this, we use the mathematical model of geometric random walk, considering such parameters as the size of consumption of the agent and his tendency to make more or less risky investments. With the help of a model, the distribution of the value of savings is deduced and its parameters are estimated. To study the dynamics of accumulation in different environments a series of experiments is conducted with a built mathematical model. A scenario parameterized on the real data is considered, it has a relatively high probability of a positive economic outcome from investments in risk assets, a scenario with a probable positive and negative economic outcomes is considered, as well as experiments simulating an unfavorable environment with a relatively low probability of a positive result.

Ключові слова: *динаміка накопичень, фактор капіталу, геометричне випадкове блукання, інвестиції.*

Keywords*: accumulation dynamics, capital factor, geometric accidental walk, investment.*

Постановка проблеми

Динаміка накопичень економічних агентів є одним з найважливіших показників, що визначає наявність та темпи розвитку економічної системи, в якій діють агенти.

Так зростання економіки будь-якої країни нерозривно пов’язано із здатністю економічних суб’єктів робити накопичення, а також із їх здатністю спрямувати свої накопичення на подальший рух у пошуку більш вигідних умов для потенційного приросту.

Дослідження накопичень окремого економічного агенту є важливою проблемою, оскільки вони визначають динаміку накопичень всієї сукупності агентів та поведінку економічної системи в цілому.

Аналіз досліджень і публікацій

Загальним питанням накопичення капіталу займалися такі класики економічної теорії як А. Сміт, Дж. Кейнс, Д. Рікардо та А. Маршалл. Сучасні дослідження присвячені інвестиціям, збільшенню накопичень та їх впливу на соціально-економічний розвиток проводили такі зарубіжні та вітчизняні вчені як А. Гриценко, Б. Кваснюк, Ф. Дондер, Ж. Гаррец, Б. Равікумар [1-3] та інші.

У той же час питання динаміки накопичень суб’єктів, що володіють фактором капіталу, з урахуванням сприятливості економічного середовища, потребує додаткових досліджень.

Мета та завдання

Метою дослідження є моделювання динаміки накопичення економічного агенту в умовах сприятливого та несприятливого серидовища з урахуванням його споживання та схильності до ризику з приводу інвестицій. Для її досягнення було поставлено та вирішено наступні задачі: 1) розробити модель динаміки накопичення економічного агенту з урахуванням норми його споживання та схильності до ризику; 2) на підставі алгоритму геометричного випадкового блукання визначити закон розподілу величини, що характеризує накопичення агенту, а також оцінити математичне сподівання і дисперсію; 3) провести серію емпіричних експериментів з параметрами, що описують реальні економічні системи та в умовах, що характеризуються більшою ймовірністю успішних інвестицій та в умовах, що менш сприяють успішності інвестицій агенту.

Основні результати дослідження

В роботі було розроблено математичну модель заощаджень і споживання економічного агенту. Модель є дискретною, тому вважатимемо, що агент отримує доходи і здійснює видатки в дискретні моменти часу $t = 1, 2, \ldots n \ldots$ Поточну суму накопичень агенту після отримання доходів і здійснення видатків в момент часу $t = n$ опишемо за допомогою дійсної змінної $S(n)$.

Будемо вважати, що в момент часу $t = n$ агент витрачає фіксовану частку від своїх накопичень $g\,(0 < g < 1)$, яка не залежить від n, і яка залишилися після попереднього кроку $t = n - 1$.

Агент може отримувати дохід від двох факторів — труда і капіталу. Спочатку, для простоти, розглянемо ситуацію, коли єдиним доходом, який отримує агент, є дохід, отриманий за рахунок фактору капіталу. Загальний вигляд моделі можна отримати з цього окремого випадку.

Накопичення (або власний капітал агенту), що залишилися після споживання в момент часу $t = n - 1$, які дорівнюють $(1 - g) \times S(n - 1)$, агент інвестує. Цей капітал агент вкладає, розподіляючи інвестиції між безризиковим банківським рахунком та інвестиціями у виробництво.

Таким чином, фіксована частка неспожитого доходу $f\,(0 < f < 1)$ вкладається у фактор виробництва з випадковим доходом $r(n)$ — цінні папери, інвестиційні активи, інщі ризикові інвестиції, а інша його частка, яка дорівнює, відповідно, $(1 - f)$ розміщується на банківському рахунку, який приносить на кожному кроці фіксований процентний дохід h.

Виходячи зі зроблених припущень, динаміку накопичень $S(n)$ можна описати рівнянням:

$$S(n) = (1 - g) \times (1 - f) \times (1 + h) \times S(n - 1) + (1 - g) \times f \times r(n) \times S(n - 1),$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Без обмеження загальності дане рівняння можна записати у вигляді:

$$S(n) = (1 - g) \times \left(a + r(n)\right) \times S(n - 1) \qquad (1)$$

де $a = (1 - f) \times (1 + h)$ —незалежна від n, константа, а $r(n)$ — випадкова величина доходу, який отримав агент від інвестиції у фактор виробництва, у випадку, коли $r(n) > 0$, агент отримує дохід, у випадку, коли $r(n) < 0$, інвестиції агенту збиткові.

Тут параметр a містить сукупну інформацію о всіх заздалегідь відомих і сталих чинниках витрат та доходів агента (в тому числі, частка фіксованих витрат від наявних заощаджень, відсотковий дохід за депозитами, тощо).

Оскільки описане вище рівняння стохастичне, тобто в ньому є випадковий коефіцієнт, воно не має єдиного рішення в класичному сенсі. Але $S(n)$ є випадковою величиною, і, вирішуючи це рівняння, ми можемо описати закон розподілу даної випадкової величини.

Завдання полягає в визначенні імовірнісного закону, що описує розподіл випадкового процесу з дискретним часом, що визначається рівнянням (1).

Послідовно ітеруючи рівняння (1) і переходячи до логарифмічної форми, отримуємо:

$$\ln(\frac{S(n)}{S(0)}) = \ln(a + r(1)) + \ln(a + r(2)) + \cdots + \ln(a + r(n)) \qquad (2)$$

Припустимо далі, що r(1), r(2), ... — незалежні випадкові величини, розподілені по одному закону R, для якого ln (a + R) має кінцеві перший і другий моменти.

Таке припущення робиться, виходячи з того, що хоча і є випадкові факторі, але природа цих випадкових факторів не змінюється. Тобто, результати можуть бути різні, але випадкові фактори, які описують функціонування даного випадкового економічного середовища, в якому діє агент, розподілені по одному й тому самому закону. Зокрема, це означає, що із плином часу не виникають нові фактори ризику і не зникають ті фактори ризику, які уже існували в системі.

Якщо n достатньо велике, і якщо $r(n)$ має скінченний другий момент, то до сумми, що стоїть в правій частині рівняння (2) можна застосувати Центральну граничну теорему, з якої витікає, що сума логарифмів розподілена нормально. А відповідно те, що стоїть під логарифмом — $\frac{S(n)}{S(0)}$ — наближено описується логарифмічно-нормальним законом.

Для наочності розглянемо окремий випадок, коли r(1), r(2), ... — бернуллівські незалежні випадкові величини, для яких r(k) = 1 з імовірністю p, r(k) = 0 з ймовірністю q = 1 - p.

Припустимо також, що a > 0, це дозволяє виключити неможливий з економічної точки зору випадок, що накопичення стануть від'ємними. Якщо з моделі виключити випадковий коефіцієнт $r(n)$, то при a > 1, накопичення агенту експоненційно зростають, якщо a < 1 — накопичення агенту експоненціально зменшуються. При цьому

$b(k) = \ln\left(1 + \frac{r(k)}{a}\right), k = 1, 2, \ldots$ також є послідовністю незалежних бернуллієвських випадкових величин з математичним очікуванням

$$M = p \times \ln(1 + \frac{1}{a})$$

і дисперсією

$$D = p \times q \times (\ln\left(1 + \frac{1}{a}\right))^2$$

Виразимо суму $b(k)$ наступним чином

$$Z(n) = \frac{\left(\ln\left(\frac{S(n)}{S(0)}\right) - n \times \ln a\right)}{\ln(1 + \frac{1}{a})}$$

Вона підпорядковується біномиальному закону B(n,p) з математичним очікуванням $n \times p$ і дисперсією $n \times p \times q$. Знаючи розподіл Z(n), легко знаходимо розподіл випадкової величини S(n).

Зазначимо, що при $n \times p \times q > 9$ і $0{,}1 < p < 0{,}9$ біноміальний розподіл можна апроксимувати нормальним розподілом з математичним очікуванням $n \times p$ і дисперсією $n \times p \times q$. При $p < 0{,}1$ можна користуватися пуассонівським розподілом.

Розглянемо запропоноване вище рівняння динаміки накопичень агента в умовах випадкової економічного середовища

$$S(n) = \big(a + r(n)\big) \times S(n-1), n = 1, 2, \ldots$$

де а — деяка, незалежна від n, константа, а r(n) — випадкова величина (наприклад, чистий інвестиційний дохід на одиницю вкладеного капіталу).

Припустимо, що r(n) може приймати значення $b = f \times (1 + k)$ з імовірністю p (сприятливий економічний результат) або значення, що відповідає несприятливому економічному результату $c = f \times (1 + l) < b$ імовірністю $q = 1 - p$, тобто є узагальненою бернуллієвською величиною [4].

k та l — це величини, які індикують, чи сприятливим було середовище для агента-власника капіталу.

Доцільно припустити, що виконується умова $a + c > 0$, що означає, що при будь-якому результаті заощадження агента не можуть обнулитися або стати від`ємними (у припущенні, що в початковий момент часу S(0) > 0).

З економічної точки зору найбільш цікавою є ситуація, коли одночасно $a + c < 1$ і $a + b > 1$, тобто при сприятливому результаті $r(n)$ заощадження агента збільшуються: $S(n) > S(n-1)$, а при несприятливому — скорочуються: $S(n) < S(n-1)$.

Раніше було знайдено розподіл $S(n)$ в окремому випадку, коли

$a > 0, b = 1$, c = 0.

Покажемо, що загальний випадок зводиться до отриманого раніше результату.

Маємо (2) $\ln\left(\frac{S(n)}{S(0)}\right) = \ln\big(a + r(1)\big) + \ln\big(a + r(2)\big) + \cdots + \ln\big(a + r(n)\big)$

Для кожного $k = 1, 2, \ldots$ випадкова величина

$$b(k) = \frac{\big(\ln\big(a + r(k)\big) - \ln(a + c)\big)}{\big(\ln(a + b) - \ln(a + c)\big)}$$

$b(k)$ приймає значення 1 з імовірністю p і 0 з імовірністю q, тобто є стандартною бернуллієвськлю випадковою величиною.

При цьому, якщо випадкові величини $r(1), r(2), \ldots$ —незалежні, то і $b(1), b(2), \ldots$ також незалежні.

Отже, випадкова величина

$$Z(n) = \frac{\left(\ln\left(\frac{S(n)}{S(0)}\right) - n \times \ln(a+c)\right)}{(\ln(a+b) - \ln(a+c))} = b(1) + b(2) + \cdots + b(n)$$

підпорядковується біноміальному закону $B(n,p)$ з математичним очікуванням — $n \times p$ і дисперсією — $n \times p \times q$, звідки знаходимо розподіл $S(n)$: $S(n) \sim C \times \exp\left[A \times B(n,p)\right]$, де

$$C = S(0) \times \exp[n \times \ln(a + c)],$$

$$A = \ln(a + b) - \ln(a + c)$$

Проведемо первинну параметризацію розробленної моделі. Побудуємо близький до реалістичного сценарій динаміки накопичень економічного агенту. Для цього дослідимо історичні дані для ринку акцій (індекс S&P 500) [5]. Запишемо рівняння середньої дохідності за період, а також середньої дисперсії, яка знаходиться як квадрат волатильності. Середня дохідність становила 10%, а стандартне відхилення — 20%. Таким чином маємо:

$$\begin{cases} p \times k + (1-p) \times l = 0{,}10 \\ p \times (1-p) \times (k-l)^2 = 0{,}04 \end{cases} \qquad (3)$$

Де p — ймовірність отримати позитивний економічний результат, k — розмір позитивного економічного результату, а l — негативний економічний результат.

За 90 календарних років з 1928 по 2017 індекс за результатами року зростав 66 разів і падав 24 рази. Таким чином, можна оцінити ймовірності позитивного та негативного економічних результатів.

$$\begin{cases} p = \frac{66}{90} = 0{,}73 \\ q = 1 - p = 0{,}27 \end{cases}$$

Підставивши значення p і q в (3), отримаємо систему з двома лінійними рівняннями, вирішуючи яку можна знайти історичні значення k та l. Таким чином, позитивний економічний результат агенту дорівнює $k = 0{,}2215$, а негативний результат становить $l = -0{,}2285$.

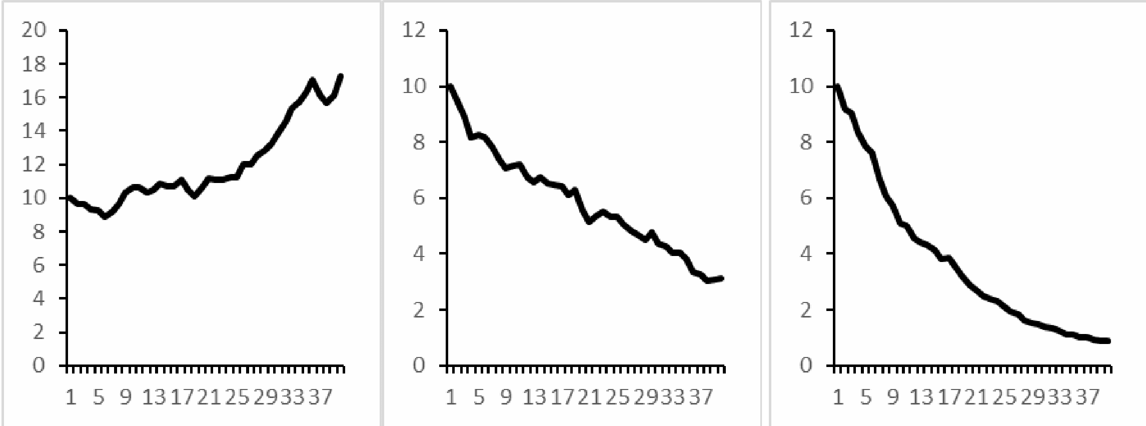
Оцінемо інші параметри моделі. Так фіксований процентний дохід h візьмемо рівним 1%, який відповідає середньому відсотку за депозитами [6]. Візьмемо рівень витрат агенту g рівним 4%. А його схильність до ризику буде середньою, тобто агент волітиме інвестувати 50% своїх накопичень безризиково, а інші 50% в більш ризикові, але потенційно більш прибуткові напрямки.

Проведемо далі серію експериментів, яка дозволить емпірично дослідити динаміку заощаджень агенту в різних умовах оточуючого середовища, а також при різних типах поведінки агенту та характері його споживання.

Нехай початковий капітал агенту становить 10 умовних одиниць. Проведемо 10 прогонів моделі з обчисленими вище параметрами та для всіх прогонів усереднимо значення накопичень агенту на кожному кроці.

Загалом змодельване середовище харакретизується доволі високою ймовірністю позитивного екномічного результату (73%). Тому проведемо також аналогічну серію спостережень, зменшивши ймовірність позитивного економічного результату спочатку до 50%, щоб зсимулювати рівноймовірний негативний та позитивний результати. Наступним кроком параметр p було зменшено таким чином, щоб промоделювати ситуцію, коли негативний економічний результат є більш ймовірнісним для агенту, ніж позитивний результат для його економічної діяльності ($p = 0.4$).

Результати кожного раунду експериментів зображено на рисунку 1: (а) — середні накопичення агенту, який веде свою діяльність в сприятливому серидовищи з більш високою ймовірністю отримання прибутку, (б) — середні накопичення агенту, що діє в середовищі з рівною ймовірністю отримати прибуток або збитки від ризикованих інвестицій, (в) — динаміка середніх накопичень агенту в несприятливому серидовищі, з більшою ймовірністю отримання збитків.



а) б) в)

Рисунок 1. Динаміка середніх накопичень агенту в умовах середовища (а) — з високою (73%), (б) — середньою (50%) і (в) — низькою (40%) ймовірністю позитивного економічного результату

Дослідимо отримані результати експериментів. З розрахованими на реальних даних параметрах і у випадку коли $p = 0.73$, усереднені накопичення агенту демонструють зростаючий тренд впродов спостережуваних 40 тактів моделі. Середнє значення накопичень становить 11,97 умовних одиниць.

Для другого раунду експериментів, який симулював діяльність агенту з такою самою схильністю до ризику та рівнем споживання, як і в першому раунді експерименту, але з ймовірністю позитивного економічного результату $p = 0.5$. Виходячи з умов експерименту, агент рівноймовірно може отримати як негативний, так і позитивний результат, але в довгостроковій перспективі, динаміка накопичень агенту має спадний тренд, а середнє значення показника за період становить лише 5,85 умовних одиниць.

Третій раунд експериментів характеризувався більшою ймовірністю негативного економічного результату, а ймовірність отримати прибуток становила лише $p = 0.4$. В цьому випадку накопичення економічного агенту характеризується ще більш вираженою спадаючою динамікою, а середнє значення за період дорівнює 3,66 умовних одиниць.

Висновки

Було розроблено математичну модель накопичень агенту-власника фактору капітала на підставі алгоритму геометричного випадкового блукання, з урахуванням його споживання та схильності до ризику. З її допомогою було досліджено динаміку заощаджень економічного агенту в умовах схожих з реальною економічною системою (із більш сприятливими умовами для ризикових інвестицій), а також в середовищі з рівноймовірними позитивними та негативними для агенту результатами і в несприятливому середовищі, з більш ймовірним негативним результатом.

Перелік джерел

1. Donder P. The dynamics of capital accumulation in the US: simulations after piketty / Philippe De Donder, John E. Roemer // The Journal of Economic Inequality, 2017 — Volume 15. — Issue 2. — pp. 121–141

2. Garrec G. Capital accumulation and the dynamics of secular stagnation / Gilles Le Garrec, Vincent Touze // Sciences Po publications, 2016 — №17.

3. Ravikumar B. Capital accumulation and dynamic gains from trade / Bala Ravikumar, Ana Maria Santacreu, Michael Sposi // Globalization and monetary policy institute working paper, 2017 — № 296.

4. Vempala S. Geometric random walks: a survey [Електронний ресурс] / Santosh Vempala // MSRI Publications: Combinatorial and Computational Geometry, 2005. — volume 52. Режим доступу: http://library.msri.org/books/Book52/files/32vemp.pdf

5. Yardeni E. Stock market briefing: S&P 500 and DJIA 1921-now [Електронний ресурс] / Edward Yardeni, Joe Abbott, Mali Quintana // Режим доступу: https://www.yardeni.com/pub/sp500dow.pdf

6. https://www.dnb.nl/en/binaries/Working%20Paper%20No.%20552_tcm47-355687.pdf

7. Gerritsen D. Bank switching and deposit rates: evidence for crisis and non-crisis years / Dirk Gerritsen, Jacob Antoon Bikker, Mike Brandsen // De Nederlandsche Bank Working Paper, 2017 — № 552.

References

1. Donder P. The dynamics of capital accumulation in the US: simulations after piketty / Philippe De Donder, John E. Roemer // The Journal of Economic Inequality, 2017 — Volume 15. — Issue 2. — pp. 121–141

2. Garrec G. Capital accumulation and the dynamics of secular stagnation / Gilles Le Garrec, Vincent Touze // Sciences Po publications, 2016 — №17.

3. Ravikumar B. Capital accumulation and dynamic gains from trade / Bala Ravikumar, Ana Maria Santacreu, Michael Sposi // Globalization and monetary policy institute working paper, 2017 — № 296.

4. Vempala S. Geometric random walks: a survey [Online] / Santosh Vempala // MSRI Publications: Combinatorial and Computational Geometry, 2005. — volume 52, available at: http://library.msri.org/books/Book52/files/32vemp.pdf

5. Yardeni E. Stock market briefing: S&P 500 and DJIA 1921-now [Online] / Edward Yardeni, Joe Abbott, Mali Quintana // available at: https://www.yardeni.com/pub/sp500dow.pdf

6. https://www.dnb.nl/en/binaries/Working%20Paper%20No.%20552_tcm47-355687.pdf

7. Gerritsen D. Bank switching and deposit rates: evidence for crisis and non-crisis years / Dirk Gerritsen, Jacob Antoon Bikker, Mike Brandsen // De Nederlandsche Bank Working Paper, 2017 — № 552.

Стаття надійшла до редакції 07.04.2018 р.